

با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

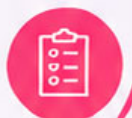


ایران توشه

توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل نهم

عنوان فصل: دایره

از صفحه‌ی ۱۳۵ تا صفحه‌ی ۱۴۹ کتاب

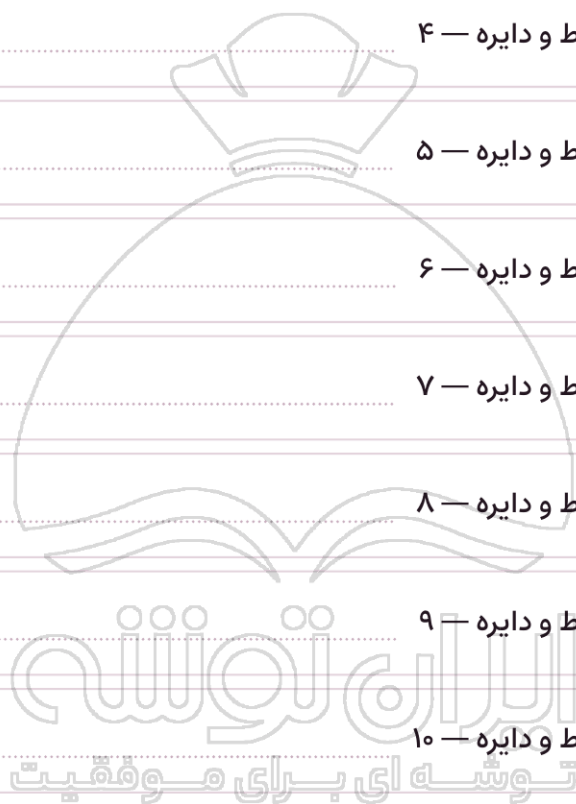
در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل دایره آمده است.
مباحث فصل: خط و دایره، زاویه‌ی مرکزی و محاطی، کاربردهایی از دایره

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۵		صفحه ۱۳۶ تمرین — خط و دایره — ۱	۱
۶		صفحه ۱۳۶ تمرین — خط و دایره — ۲	۲
۶		صفحه ۱۳۶ تمرین — خط و دایره — ۳	۳
۷		صفحه ۱۳۷ تمرین — خط و دایره — ۴	۴
۸		صفحه ۱۳۷ تمرین — خط و دایره — ۵	۵
۸		صفحه ۱۳۷ تمرین — خط و دایره — ۶	۶
۹		صفحه ۱۳۸ تمرین — خط و دایره — ۷	۷
۱۰		صفحه ۱۳۸ تمرین — خط و دایره — ۸	۸
۱۰		صفحه ۱۳۸ تمرین — خط و دایره — ۹	۹
۱۱		صفحه ۱۳۸ تمرین — خط و دایره — ۱۰	۱۰
۱۱		صفحه ۱۳۸ تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۱	۱۱
۱۲		صفحه ۱۳۸ تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۲	۱۲
۱۳		صفحه ۱۳۹ تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۳	۱۳
۱۴		صفحه ۱۳۹ تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۴	۱۴



۱۵	صفحه ۱۳۹ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۵	۱۵
۱۵	صفحه ۱۴۰ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۶	۱۶
۱۶	صفحه ۱۴۰ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۷	۱۷
۱۷	صفحه ۱۴۰ · مسئله — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۸	۱۸
۱۸	صفحه ۱۴۱ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۹	۱۹
۱۹	صفحه ۱۴۱ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۱۰	۲۰
۲۰	صفحه ۱۴۱ · تمرین — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۱۱	۲۱
۲۱	صفحه ۱۴۱ · مسئله — زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی — ۱۲ (سینمای کاظم)	۲۲
۲۳	صفحه ۱۴۳ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۱	۲۳
۲۴	صفحه ۱۴۳ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۲	۲۴
۲۴	صفحه ۱۴۳ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۳	۲۵
۲۶	صفحه ۱۴۴ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۴	۲۶
۲۷	صفحه ۱۴۵ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۵	۲۷
۲۸	صفحه ۱۴۵ · تمرین — کاربردهایی از دایره — ۶	۲۸
۲۸	صفحه ۱۴۶ · پروژه — کاربردهایی از دایره — ۷ (پروژه)	۲۹

۱. دایره‌ی c به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطه‌ی A خارج از دایره‌ی c ، یک مماس بر دایره رسم کنید.
الف) درستی روش‌های سمیه و مرضیه را بررسی کنید.
ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم خط مماس از یک نقطه‌ی خارج از دایره، ارائه دهید؟

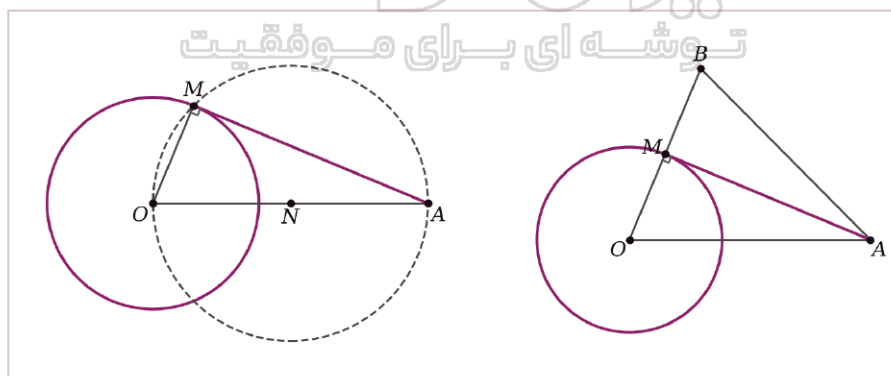
راه‌حل سمیه: وسط پاره‌خط OA را N بنامید. به مرکز N و شعاع ON دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خطی که A را به محل برخورد دو دایره وصل می‌کند، بر دایره مماس است.

راه‌حل مرضیه: مثلث متساوی‌الساقین AOB را به ساق OA و قاعده‌ی $OB = 2r$ رسم می‌کنیم. محل برخورد OB را با دایره M می‌نامیم. AM بر دایره مماس است.

مطلب‌های لازم از درس: خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد بر دایره مماس است؛ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، 90° درجه است؛ در مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌ی وارد بر قاعده بر قاعده عمود است.

الف) بررسی روش سمیه: دایره‌ی به مرکز N از O (که درون دایره‌ی c است) و از A (که بیرون دایره‌ی c است) می‌گذرد؛ پس دایره‌ی c را قطع می‌کند. OA قطر این دایره است. اگر M یکی از نقطه‌های برخورد دو دایره باشد، زاویه‌ی محاطی $\angle OMA$ روبه‌رو به قطر است و برابر 90° است. پس $AM \perp OM$ و چون OM شعاع دایره‌ی c است و AM در انتهای آن بر آن عمود است، AM بر دایره‌ی c مماس است. **روش سمیه درست است.** (دو نقطه‌ی برخورد، دو مماس می‌دهد.)

بررسی روش مرضیه: چون $OA > r$ ، داریم $OA + AB = 2 \cdot OA > 2r = OB$ ؛ پس مثلث AOB با $AO = AB$ و $OB = 2r$ ساخته می‌شود. نقطه‌ی M روی OB و روی دایره است، پس $OM = r$ و $OM = OB / 2$ ؛ یعنی M وسط قاعده‌ی OB است. AM میانه‌ی وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین AOB است، پس بر OB عمود است: $AM \perp OB$. چون OM شعاع است، AM مماس است. **روش مرضیه هم درست است.**



سمت راست: روش مرضیه؛ سمت چپ: روش سمیه (خط AM در هر دو شکل مماس است).

ب) روش دیگر (با وترهای برابر):

۱. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم.

2. نقطه‌ی دلخواه P را روی دایره‌ی c می‌گیریم و در P بر OP عمود می‌کنیم. این خط بر c مماس است و دایره‌ی بزرگ را در X و Y قطع می‌کند. فاصله‌ی مرکز O از وتر XY برابر $r = OP$ است.
3. با دهانه‌ی پرگار برابر XY و به مرکز A روی دایره‌ی بزرگ نقطه‌ی A' را مشخص می‌کنیم؛ پس $AA' = XY$.
4. وترهای AA' و XY در دایره‌ی بزرگ برابرند؛ طبق «تمرین ۶» همین بخش، مرکز از دو وتر برابر فاصله‌ی یکسان دارد. پس فاصله‌ی O از AA' هم برابر r است؛ یعنی خط AA' از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر دایره‌ی c مماس است.

با گذاشتن A' در دو سوی A هر دو مماس به دست می‌آیند.

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲

۲. از نقطه‌ی A خارج از دایره‌ای به مرکز O، دو مماس AM و AN بر دایره رسم شده است.

الف) ثابت کنید OA عمودمنصف MN است.

ب) چه شرطی به مسئله اضافه کنیم تا MN عمودمنصف OA باشد؟

الف) مماس بر شعاع نقطه‌ی تماس عمود است: $OM \perp AM$ و $ON \perp AN$. در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMA و ONA داریم $OM = ON = r$ و OA مشترک است. طبق رابطه‌ی فیثاغورس: $AM^2 = OA^2 - r^2$ و $AN^2 = OA^2 - r^2$ ؛ پس $AM = AN$.

چون $AM = AN$ ، نقطه‌ی A روی عمودمنصف MN است؛ چون $OM = ON$ ، نقطه‌ی O هم روی عمودمنصف MN است. از دو نقطه‌ی متمایز O و A فقط یک خط می‌گذرد؛ پس خط OA همان عمودمنصف MN است. ■

ب) شرط: دو مماس بر هم عمود باشند ($\angle MAN = 90^\circ$)؛ هم‌ارز با: $AM = r$ یا $OA = r\sqrt{2}$.

اثبات: چهارضلعی OMAN سه زاویه‌ی قائمه دارد ($\angle M = \angle N = \angle A = 90^\circ$)، پس زاویه‌ی چهارم هم 90° است و مستطیل است. چون ضلع‌های مجاور OM و ON برابرند ($= r$)، مستطیل، مربع است و قطرهای مربع (OA و MN) یکدیگر را در وسط، عمود نصف می‌کنند. پس MN عمودمنصف OA است. (در این حالت $OA^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ و $OA = r\sqrt{2}$). ■

تمرین

صفحه ۱۳۶

۳

۳. ثابت کنید اگر خطی دو دایره‌ی هم‌مرکز را قطع کند، دو پاره‌خط که بین دو دایره قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

فرض: دو دایره به مرکز مشترک O؛ خط l دایره‌ی بزرگ را در A و D و دایره‌ی کوچک را در B و C قطع می‌کند (ترتیب نقطه‌ها روی خط: A, B, C, D). حکم: $AB = CD$.

1. از O بر خط l عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم.

2. عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر وارد شود، وتر را نصف می‌کند. در دایره‌ی بزرگ وتر AD است؛ پس $AH = HD$.
3. در دایره‌ی کوچک وتر BC است؛ پس $BH = HC$.
4. $AB = AH - BH$ و $CD = HD - HC$. چون $AH = HD$ و $BH = HC$ ، نتیجه می‌شود $AB = CD$. ■

تمرین

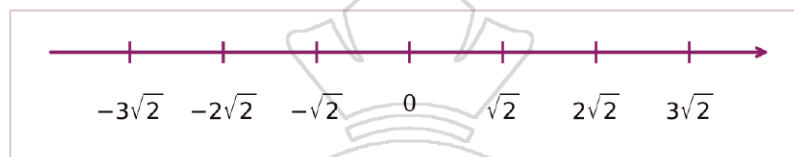
صفحه ۱۳۷

۴

۴. در محور زیر، هر واحد به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ است. می‌خواهیم عدد ۱ را روی این محور مشخص کنیم.

الف) درستی روش‌های آرش و سهراب را بررسی کنید.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای این مسئله ارائه دهید؟



آرش و سهراب مسئله‌ی بالا را این‌گونه حل کرده‌اند:

راه‌حل آرش: نقطه‌ی صفر را P و نقطه‌ی $-\sqrt{2}$ را C می‌نامیم. به مرکز نقطه‌ی C و شعاع CP دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی C خطی عمود بر محور اعداد رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های Q و T قطع کند. از نقطه‌ی C عمود بر خط PQ رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد را M می‌نامیم. به مرکز P و شعاع PM دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقطه‌های ۱ و -۱ قطع می‌کند.

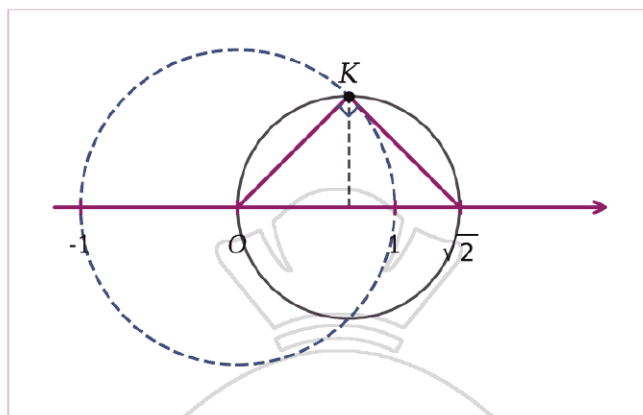
راه‌حل سهراب: به مرکز $-3\sqrt{2}$ و شعاع $\sqrt{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی صفر مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و محل برخورد آن مماس با دایره را P می‌نامیم. نقطه‌ی صفر را O می‌نامیم و با استفاده از رسم عمود منصف، ابتدا وسط پاره‌خط OP (نقطه‌ی N) و سپس وسط پاره‌خط ON (نقطه‌ی M) را مشخص می‌کنیم. اکنون دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقاط ۱ و -۱ قطع می‌کند.

الف) روش آرش: $CP = CQ = \sqrt{2}$ و CQ بر محور (یعنی بر CP) عمود است؛ پس مثلث CPQ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. طبق فیثاغورس $PQ^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$ ، پس $PQ = 2$. عمودی که از C بر PQ رسم می‌شود، میانه‌ی وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین است؛ پس M وسط PQ است و $PM = 1$. دایره‌ی به مرکز P و شعاع ۱ محور را در ۱ و -۱ قطع می‌کند. **روش آرش درست است.**

روش سهراب: مرکز دایره $C' = -3\sqrt{2}$ است و فاصله‌ی آن تا O برابر $3\sqrt{2}$ است. چون $3\sqrt{2} > \sqrt{2}$ ، نقطه‌ی O بیرون دایره است و مماس وجود دارد. مماس بر شعاع $C'P$ عمود است؛ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPC' : $OP^2 = OC'^2 - C'P^2 = 18 - 2 = 16$ و $OP = 4$. N وسط OP است: $ON = 2$ و M وسط ON است: $OM = 1$. دایره‌ی به مرکز O و شعاع $OM = 1$ محور را در ۱ و -۱ قطع می‌کند. **روش سهراب هم درست است.**

(ب) روش دیگر: نقطه‌ی A (به جای $\sqrt{2}$) را روی محور داریم و $OA = \sqrt{2}$. وسط OA را پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. عمودمنصف OA این دایره را در K قطع می‌کند.

1. $\circ$ K روی دایره‌ی به قطر OA است؛ پس $\angle OKA = 90^\circ$ (زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر).
2. $\circ$ K روی عمودمنصف OA است؛ پس $KO = KA$.
3. $\circ$ فیثاغورس: $KO^2 + KA^2 = OA^2 = 2$ و چون $KO = KA$ ، $2 \cdot KO^2 = 2$ و $KO = 1$.
4. $\circ$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع OK محور را در 1 و -1 قطع می‌کند.



تمرین

صفحه ۱۳۷

۵

۵. در یک دایره وترى به طول ۸ مفروض است. اگر طول بزرگ‌ترین وتر این دایره ۱۲ باشد، آنگاه فاصله‌ی مرکز دایره تا وتر مفروض چقدر است؟

بزرگ‌ترین وتر هر دایره، قطر آن است؛ پس قطر ۱۲ و شعاع $r = 6$ است.

از مرکز O بر وتر $AB = 8$ عمود می‌کنیم؛ پای عمود H وسط وتر است: $AH = 4$. OH همان فاصله‌ی خواسته شده است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHA (فیثاغورس):

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$$

$$OH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

پاسخ: فاصله‌ی مرکز تا وتر برابر $2\sqrt{5}$ (تقریباً ۴,۴۷) است. (این مقدار از شعاع ۶ کوچک‌تر است، پس قابل قبول است.)

تمرین

صفحه ۱۳۷

۶

۶. دو مسئله‌ی زیر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟ هریک را حل کنید.
مسئله‌ی اول: ثابت کنید مرکز دایره از دو وترى که باهم برابرند، فاصله‌ی یکسان دارد.

مسئله دوم: ثابت کنید دو وتر که از مرکز دایره فاصله‌ی یکسان دارند، باهم برابرند.

تفاوت: «فرض» و «حکم» جابه‌جا شده‌اند. در مسئله‌ی اول فرض «دو وتر برابرند» و حکم «فاصله‌ها از مرکز برابرند» است؛ در مسئله‌ی دوم فرض «فاصله‌ها برابرند» و حکم «وترها برابرند» است. مسئله‌ی دوم عکس مسئله‌ی اول است (و باید جداگانه ثابت شود).

حل مسئله اول: فرض $AB = CD$. از مرکز O بر AB و CD عمود می‌کنیم و پای عمودها را H و K می‌نامیم. عمود وارد از مرکز بر وتر آن را نصف می‌کند: $AH = AB/2 = CD/2 = CK$. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHA و OKC : $OA = OC = r$. طبق فیثاغورس $OH^2 = r^2 - AH^2$ و $OK^2 = r^2 - CK^2$. چون $AH = CK$ ، پس $OH^2 = OK^2$ و $OH = OK$. ■

حل مسئله دوم: فرض $OH = OK$ (فاصله‌ها). طبق فیثاغورس $AH^2 = r^2 - OH^2$ و $CK^2 = r^2 - OK^2$. پس $AH^2 = CK^2$ و $AH = CK$. چون H و K وسط‌ها هستند، $AB = 2AH = 2CK = CD$. ■

تمرین

صفحه ۱۳۸

۷

تمرین‌های بعدی این بخش را با کمک مسئله‌ی اول و مسئله‌ی دوم تمرین قبل حل کنید و در هر مورد مشخص کنید که از مسئله‌ی اول استفاده کرده‌اید یا مسئله‌ی دوم.
۷. وترهای AC و BD یکدیگر را داخل دایره‌ای به مرکز O ، در نقطه‌ی M قطع کرده‌اند. اگر AB قطر دایره باشد و $MO \perp AB$ ، آنگاه ثابت کنید $AC = BD$.

استفاده شده: مسئله دوم (وترهایی که از مرکز فاصله‌ی یکسان دارند، برابرند). باید ثابت کنیم فاصله‌ی O از AC و از BD برابر است.

۱. O وسط قطر AB است و $MO \perp AB$. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی MOA و MOB دو ضلع برابر دارند ($OA = OB$ شعاع‌اند و MO مشترک است) و زاویه‌ی بین آن دو ضلع 90° است؛ پس هم‌نهشت‌اند و $\angle MAO = \angle MBO$. این زاویه را α می‌نامیم.
۲. از O بر AC و BD عمود می‌کنیم: پای عمودها H و K . چون α زاویه‌ی تند است، H روی نیم‌خط AM و K روی نیم‌خط BM می‌افتد؛ پس $\angle OAH = \alpha$ و $\angle OBK = \alpha$.
۳. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHA و OKB : وترها برابرند ($OA = OB$) و یک زاویه‌ی تند هر دو برابر α است؛ پس هم‌نهشت‌اند و $OH = OK$.
۴. فاصله‌ی O از دو وتر AC و BD برابر است؛ طبق مسئله‌ی دوم $AC = BD$. ■

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۸. دو وتر برابر و غیر متقاطع AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. اگر امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند، ثابت کنید OM نیم‌ساز زاویه‌ی AMC است.

استفاده شده: مسئله‌ی اول (وترهای برابر از مرکز فاصله‌ی یکسان دارند).

۱. از O بر AB و CD عمود می‌کنیم؛ پای عمودها H و K (وسط وترها). چون $AB = CD$ ، طبق مسئله‌ی اول $OH = OK$.
۲. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHM و OKM: وتر OM مشترک است و $OH = OK$ ؛ پس طبق حالت «وتر و یک ضلع» هم‌نهشت‌اند و $\angle OMH = \angle OMK$.
۳. M بیرون دایره است و امتداد دو وتر از آن می‌گذرد؛ پس A و B روی یک نیم‌خط از M قرار دارند و H (وسط AB) هم روی همان نیم‌خط است؛ این نیم‌خط همان MA است. به همین ترتیب K روی نیم‌خط MC است.
۴. پس $\angle OMA = \angle OMH = \angle OMK = \angle OMC$ ؛ یعنی OM زاویه‌ی AMC را نصف می‌کند. ■

۹. ثابت کنید در یک دایره پاره‌خط‌های جداشده روی دو وتر متقاطع و مساوی، باهم برابرند.

استفاده شده: مسئله‌ی اول. فرض: وترهای برابر AB و CD در نقطه‌ی M درون دایره متقاطع‌اند. حکم: پاره‌خط‌های جداشده برابرند؛ یعنی (با نام‌گذاری مناسب) $AM = CM$ و $BM = DM$.

۱. از مرکز O بر AB و CD عمود می‌کنیم؛ پای عمودها H و K وسط وترها هستند. چون وترها برابرند، $AH = HB = CK = KD$ و طبق مسئله‌ی اول $OH = OK$.
۲. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHM و OKM داریم (فیثاغورس): $HM^2 = OM^2 - OH^2 = OM^2 - OK^2 = KM^2$ ؛ پس $HM = KM$.
۳. نام‌گذاری: سر A از وتر AB را آن سری می‌گیریم که H بین A و M باشد؛ و سر C از وتر CD را آن سری که K بین C و M باشد. آن‌گاه $AM = AH + HM = CK + KM = CM$ و برای سرهای دیگر $BM = BH - HM = DK - KM = DM$.
۴. اگر M بر H (و پس K) منطبق باشد، M وسط هر دو وتر است و $AM = BM = CM = DM$ به‌طور مستقیم برقرار است. ■

۱۰. نقطه‌های A، B و C روی یک دایره قرار دارند. اگر نیم‌سازهای زاویه‌های BAC و ACB یکدیگر را در مرکز دایره قطع کنند، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

استفاده شده: مسئله‌ی دوم. هر نقطه‌ی روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. مرکز O:

○ روی نیم‌ساز $\angle BAC$ است؛ پس فاصله‌ی O از AB و AC برابر است.

○ روی نیم‌ساز $\angle ACB$ است؛ پس فاصله‌ی O از CA و CB برابر است.

بنابراین فاصله‌ی مرکز از هر سه وتر AB، AC و BC یکسان است. طبق مسئله‌ی دوم، وترهایی که از مرکز فاصله‌ی یکسان دارند برابرند: $AB = AC = BC$. پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. ■

۱. در دایره‌ای به شعاع r، دو وتر AB و AC مفروض‌اند. در هر یک از حالت‌های زیر بررسی کنید که AC بر AB عمود است یا خیر؟

(الف) $r = ۱۷$ ، $AB = ۱۵$ ، $AC = ۹$ (ب) $r = ۲۶$ ، $AB = ۸$ ، $AC = ۹$ (ج) $r = ۱۳$ ، $AB = ۲۴$ ، $AC = ۲۴$ ، $AB = ۱۰$

ابزار: اگر $AC \perp AB$ باشد، زاویه‌ی محاطی $\angle BAC = ۹۰^\circ$ است و وتر BC قطر دایره است، یعنی $BC = ۲r$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طبق فیثاغورس $BC^2 = AB^2 + AC^2$. پس اگر $AC \perp AB$ باشد، حتماً باید $AB^2 + AC^2 = (۲r)^2$ برقرار باشد.

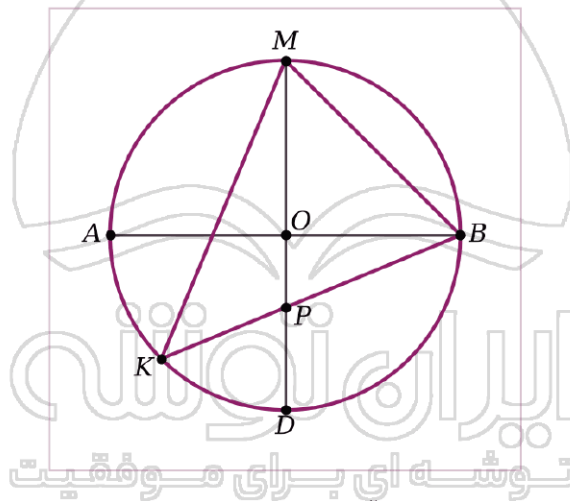
حالت	$AB^2 + AC^2$	$(۲r)^2$	نتیجه
الف	$۶۴ + ۲۲۵ = ۲۸۹$	$۳۴^2 = ۱۱۵۶$	برابر نیست
ب	$۵۷۶ + ۸۱ = ۶۵۷$	$۵۲^2 = ۲۷۰۴$	برابر نیست
ج	$۱۰۰ + ۵۷۶ = ۶۷۶$	$۲۶^2 = ۶۷۶$	برابر است

(الف) خیر و (ب) خیر: شرط لازم برقرار نیست، پس در این دو حالت AC به هیچ وجه بر AB عمود نیست.

(ج) شرط برقرار است: $AB^2 + AC^2 = ۶۷۶ = ۲۶^2 = (۲r)^2$. اگر BC را قطر دایره بگیریم ($BC = ۲۶ = ۲r$)، مثلث ABC با ضلع‌های ۱۰ و ۲۴ و ۲۶ قائم‌الزاویه است ($۱۰^2 + ۲۴^2 = ۲۶^2$) و زاویه‌ی A قائمه است؛ پس در این حالت AC می‌تواند (و در حالت BC قطر، حتماً) بر AB عمود باشد. (توجه: چون فقط طول‌ها داده شده‌اند، وتر AC را می‌شود در دو سوی AB رسم کرد؛ عمود بودن فقط در حالتی است که BC قطر دایره شود.)

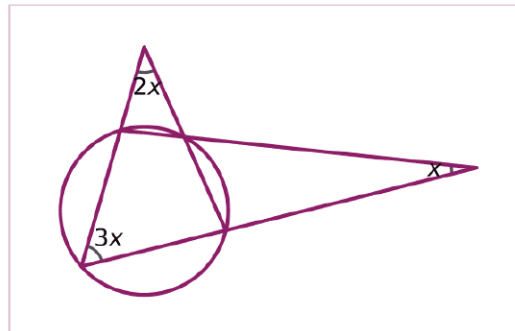
۲. در دایره‌ی c به مرکز O ، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطه‌ی P روی قطر DM طوری قرار دارد که $MP = MB$. اگر K محل برخورد امتداد BP با دایره باشد، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی KMO چقدر است؟

۱. M وسط نیم‌دایره‌ی AB است؛ پس $\angle MOB = 90^\circ$ و $OM = OB = r$. مثلث MOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است: $\angle OMB = 45^\circ$ و $MB = r\sqrt{2}$.
۲. پس P روی قطر DM بعد از O قرار دارد و نیم‌خط MO همان نیم‌خط MP است. در مثلث متساوی‌الساقین MPB ($MP = MB$) زاویه‌ی رأس $\angle PMB = \angle OMB = 45^\circ$ است؛ پس $\angle MPB = \angle MBP = (180^\circ - 45^\circ)/2 = 67,5^\circ$.
۳. K روی امتداد BP بعد از P است؛ پس $\angle MPK = 180^\circ - 67,5^\circ = 112,5^\circ$.
۴. $\angle MKB$ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به کمان MB است. کمان MB برابر زاویه‌ی مرکزی $\angle MOB = 90^\circ$ است، پس $\angle MKB = 90^\circ/2 = 45^\circ$ ؛ یعنی $\angle MKP = 45^\circ$.
۵. در مثلث MPK : $\angle PMK = 180^\circ - 112,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$. چون نیم‌خط MP همان MO است، $\angle KMO = \angle KMP = 22,5^\circ$.

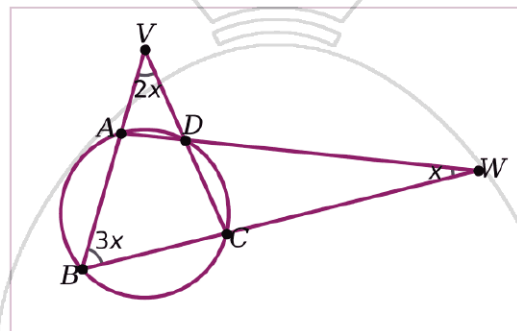


پاسخ: $\angle KMO = 22,5^\circ$ (یعنی ۲۲ درجه و ۳۰ دقیقه).

۳. در شکل زیر مقدار x چقدر است؟



نقطه‌ها را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم: چهارضلعی ABCD در دایره محاط است؛ خط‌های AB و DC در V و خط‌های AD و BC در W به هم می‌رسند و $\angle V = 2x$ ، $\angle W = x$ و $\angle ABC = 3x$.



مطلب لازم: در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند؛ پس هر زاویه‌ی خارجی برابر زاویه‌ی داخلی روبه‌روی آن رأس است.

۱. زاویه‌ی خارجی در رأس D برابر زاویه‌ی داخلی روبه‌رو یعنی $\angle ABC = 3x$ است: $\angle VDA$ و $\angle WDC = 3x$ (دو زاویه‌ی متقابل به رأس).

۲. مثلث WDC: $\angle W = x$ و $\angle WDC = 3x$ ؛ پس $\angle WCD = 180^\circ - 4x$.

۳. $\angle WCD$ زاویه‌ی خارجی در رأس C است؛ پس $\angle BCD = 180^\circ - \angle WCD = 4x$. زاویه‌ی روبه‌روی آن، $\angle DAB = 180^\circ - 4x$ است.

۴. زاویه‌ی خارجی در A: $\angle VAD = 180^\circ - \angle DAB = 4x$.

۵. مثلث VAD: زاویه‌ها $\angle V = 2x$ ، $\angle VAD = 4x$ و $\angle VDA = 3x$ هستند و مجموعشان 180° است: $2x + 4x + 3x = 180^\circ$.

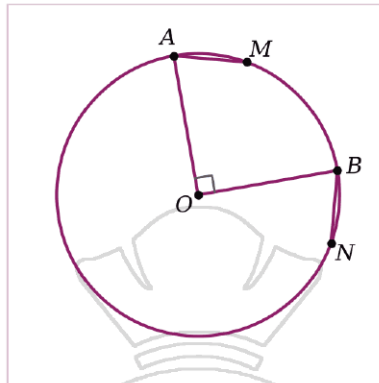
$$9x = 180^\circ \text{ پس } x = 20^\circ$$

پاسخ: $x = 20^\circ$ (زاویه‌ها: $2x = 40^\circ$ ، $3x = 60^\circ$).

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.



۴. در دایره‌ی زیر دو شعاع OA و OB برهم عمودند. اگر طول کمان‌های AM و BN برابر باشند، آنگاه ثابت کنید امتداد پاره‌خط‌های AM و BN برهم عمودند.



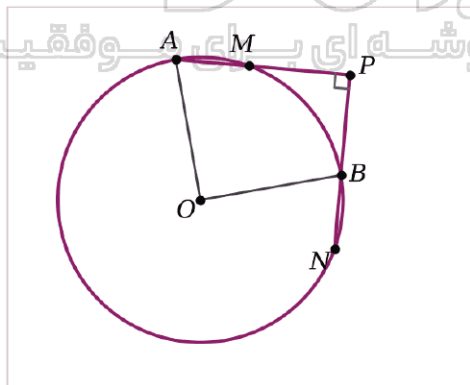
فرض کنیم هر یک از دو کمان AM و BN برابر φ درجه باشد. امتداد AM (بعد از M) و امتداد NB (بعد از B) را رسم می‌کنیم تا در P برخورد کنند. باید ثابت کنیم $\angle APB = 90^\circ$.

۱. زاویه‌ی مرکزی $\angle AOM = \varphi$ است (برابر کمان). مثلث OAM متساوی الساقین است ($OA = OM$) پس

$$\angle OAM = (180^\circ - \varphi)/2 = 90^\circ - \varphi/2. \quad \angle OAP = 90^\circ - \varphi/2.$$

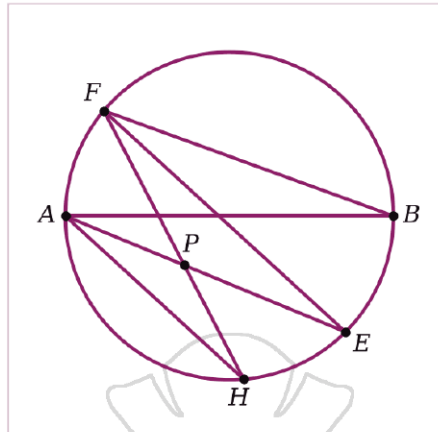
۲. به همین ترتیب $\angle BON = \varphi$ و $\angle OBN = 90^\circ - \varphi/2$. چون P روی امتداد NB بعد از B است، $\angle OBP = 180^\circ - (90^\circ - \varphi/2) = 90^\circ + \varphi/2$.

۳. در چهارضلعی OAPB مجموع زاویه‌ها 360° است و $\angle AOB = 90^\circ$. پس $\angle APB = 360^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \varphi/2) - (90^\circ + \varphi/2) = 90^\circ$.



مقدار φ در جمع حذف شد؛ پس نتیجه برای هر اندازه‌ی کمان برقرار است.

۵. الف) ثابت کنید کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، باهم برابرند.
 ب) در دایره‌ی زیر، وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\widehat{FBA} = 20^\circ$ ، آنگاه زاویه‌ی HPE چند درجه است؟



الف) فرض: $AB \parallel CD$ دو وتر یک دایره‌اند (A و C در یک سو). حکم: کمان‌های AC و BD برابرند.

۱. وتر AD را رسم می‌کنیم. $AB \parallel CD$ و AD مورب است؛ پس زاویه‌های متبادل برابرند: $\angle BAD = \angle ADC$.
۲. $\angle BAD$ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به کمان BD و $\angle ADC$ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به کمان AC است. زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌رویش است؛ پس $\text{کمان } AC / 2 = \text{کمان } BD / 2$ و $\text{کمان } AC = \text{کمان } BD$. ■

ب)

۱. $\angle FBA = 20^\circ$ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به کمان FA است؛ پس کمان $FA = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$.
۲. $AH \parallel FE$ ؛ طبق «الف» کمان‌های محصور بین این دو وتر برابرند: کمان $HE = \text{کمان } FA = 40^\circ$.
۳. $\angle EAH$ محاطی روبه‌رو به کمان HE است: $\angle EAH = 40^\circ / 2 = 20^\circ$. $\angle FHA$ محاطی روبه‌رو به کمان FA است: $\angle FHA = 40^\circ / 2 = 20^\circ$.
۴. P محل برخورد وترهای AE و FH است. در مثلث APH، زاویه‌ی خارجی رأس P است و برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است: $\angle HPE = \angle PAH + \angle PHA = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$.

پاسخ: $\angle HPE = 40^\circ$.

۶. الف) چرا جمله‌ی زیر درست نیست؟ سعی کنید آن را اصلاح کنید.
 «اگر کمان‌های محصور بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر موازی‌اند.»

(ب) رئوس چهارضلعی ABCD روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر قطرهای ABCD یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند و OM نیم‌ساز زاویه‌ی CMD باشد، آنگاه ثابت کنید ABCD یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

الف) چرا درست نیست: مثال نقض: روی دایره هشت نقطه‌ی هم‌فاصله $P_0, P_1, \dots, P_7$ می‌گیریم (هر کمان 45°). وترهای P_0P_2 و P_1P_3 را در نظر می‌گیریم. کمان P_0P_1 و کمان P_2P_3 بین دو وتر قرار دارند و هر دو 45° هستند، ولی این دو وتر یکدیگر را درون دایره قطع می‌کنند و موازی نیستند.

اصلاح: «اگر دو وتر AB و CD یکدیگر را درون دایره قطع نکنند (یعنی نقطه‌ها به ترتیب A, B, C, D روی دایره باشند) و کمان‌های محصور بین آن‌ها (BC و AD) برابر باشند، آنگاه $AB \parallel CD$ ». (عکس قضیه‌ی تمرین ۵ الف) اثبات جمله‌ی اصلاح‌شده: وتر AC را رسم می‌کنیم. $\angle BAC$ محاطی روبه‌رو به کمان BC و $\angle ACD$ محاطی روبه‌رو به کمان AD است و چون این دو کمان برابرند، $\angle BAC = \angle ACD$. این‌ها زاویه‌های متبادل خط AC با دو خط AB و CD هستند (B و D دو سوی AC اند)؛ پس $AB \parallel CD$. ■

ب) فرض: M درون دایره (محل برخورد قطرهای چهارضلعی محاطی) است و خط OM نیم‌ساز $\angle CMD$ است.

1. ○ بازتاب نسبت به خط OM را در نظر می‌گیریم. دایره (چون مرکزش روی OM است) و نقطه‌ی M ثابت می‌مانند. چون OM نیم‌ساز $\angle CMD$ است، نیم‌خط MC به نیم‌خط MD می‌رود.

2. ○ C روی دایره و روی نیم‌خط MC است؛ پس تصویرش روی دایره و روی نیم‌خط MD است. هر نیم‌خطی که از نقطه‌ی درون دایره خارج شود دایره را فقط در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس C به D می‌رود (و D به C). (C)

3. ○ نیم‌خط MA (مقابل MC) به نیم‌خط مقابل MD یعنی MB می‌رود؛ همان استدلال نشان می‌دهد A به B می‌رود.

4. ○ پاره‌خط‌های AB و CD هر کدام به خودشان (با جابه‌جایی دو سر) می‌روند؛ پس هر دو بر خط تقارن OM عمودند و $AB \parallel CD$.

5. ○ پاره‌خط AD به BC می‌رود؛ بازتاب طول را حفظ می‌کند: $AD = BC$.

پس ABCD دو ضلع موازی AB و CD و دو ساق برابر AD و BC دارد و نسبت به خط OM متقارن است؛ یعنی دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است. ■

تمرین

صفحه ۱۴۰

۱۷

۷. الف) در شکل زیر، همه‌ی نقاطی در صفحه، مانند C، را مشخص کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد به‌طوری‌که $\hat{C} = 90^\circ$.

ب) کدام یک از مثلث‌هایی که در «الف» ساخته‌اید متساوی‌الساقین هستند؟

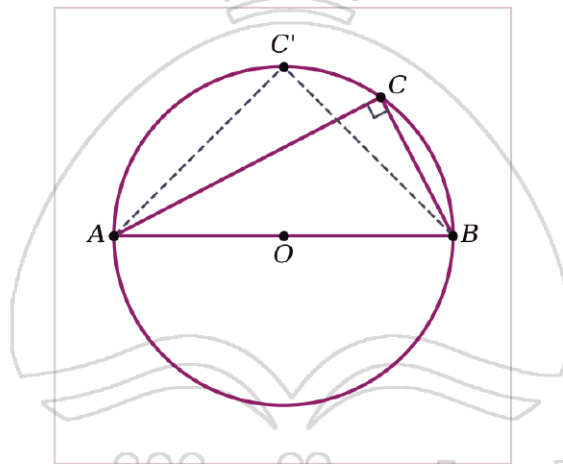


الف) زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر 90° است؛ و برعکس، اگر $\angle ACB = 90^\circ$ باشد، AB قطر دایره‌ی گذرنده از A ، B و C است و مرکز این دایره وسط AB است. پس C باید روی دایره‌ای باشد که AB قطر آن است.

1. ☐ وسط AB را با رسم عمودمنصف پیدا می‌کنیم و O می‌نامیم.

2. ☐ دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم.

پاسخ الف: همه‌ی نقاط این دایره، به جز A و B (که با آن‌ها مثلثی ساخته نمی‌شود).



ب) در مثلث قائم‌الزاویه با $\angle C = 90^\circ$ ، وتر AB بلندترین ضلع است؛ پس $CA = AB$ یا $CB = AB$ ممکن نیست و تنها حالت متساوی‌الساقین $CA = CB$ است. C باید روی عمودمنصف AB باشد. این خط دایره را در دو نقطه (یکی بالای AB و یکی پایین آن) قطع می‌کند.

پاسخ ب: فقط دو مثلث: مثلث‌هایی که C در دو نقطه‌ی برخورد عمودمنصف AB با دایره باشد (مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین). بقیه‌ی مثلث‌ها متساوی‌الساقین نیستند.

مسئله

صفحه ۱۴۰

۱۸

۸. مژگان و فاطمه دو مسئله‌ی زیر را این‌گونه حل کرده‌اند:

مسئله‌ی اول. ثابت کنید اگر در یک مثلث، میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

راه حل مژگان: فرض کنید در مثلث ABC نقطه‌ی M روی ضلع BC باشد به طوری که BM، AM و CM باهم برابر باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم زاویه‌ی A قائمه است. برای این کار دایره‌ای به مرکز M و شعاع AM رسم می‌کنیم. چون BC قطر این دایره است پس $\hat{A} = 90^\circ$.

مسئله‌ی دوم: ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

راه حل فاطمه: فرض کنید در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم میانه‌ی وارد بر BC، نصف آن است. می‌دانیم که از رأس هر مثلث، دایره‌ای می‌گذرد. اگر این دایره را رسم کنیم چون کمان روبه‌رو به $\hat{A}$ برابر 180° است پس مرکز دایره روی BC قرار دارد که اگر مرکز را به نقطه‌ی A وصل کنیم، اثبات کامل می‌شود.

در متن کتاب پرسش صریحی نیامده است؛ درستی دو راه حل بررسی شد:

راه حل مژگان درست است. B و C روی دایره‌ی به مرکز M هستند ($MB = MC = MA$) و M روی پاره خط BC است؛ پس $BC = MB + MC = 2 \cdot MA$ و BC از مرکز می‌گذرد، یعنی قطر است. زاویه‌ی محاطی $\angle BAC$ روبه‌رو به قطر است، پس 90° است.

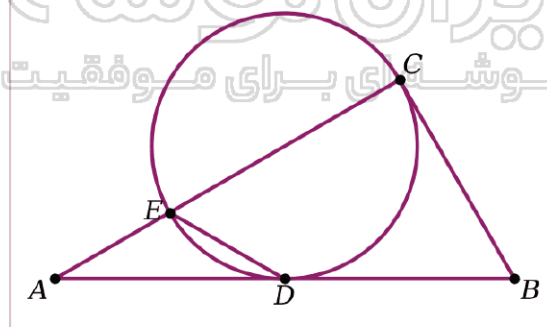
راه حل فاطمه درست است. دایره‌ی گذرنده از سه رأس: زاویه‌ی محاطی $\angle A = 90^\circ$ پس کمان روبه‌رویش (کمان BC) 180° است، یعنی BC قطر است و مرکز O وسط BC است. OA شعاع است و $OA = BC/2$. AO هم میانه‌ی وارد بر BC است (چون O وسط BC است)؛ پس میانه نصف وتر است. ■

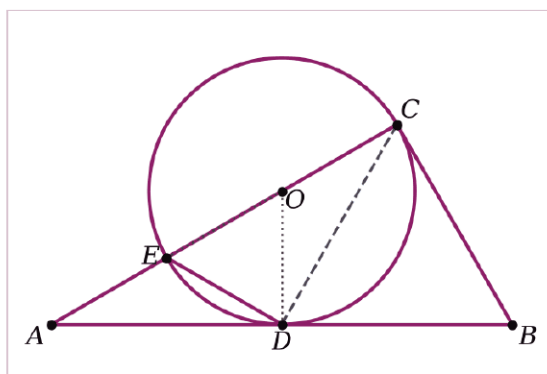
تمرین

صفحه ۱۴۱

۱۹

۹. در شکل زیر، EC قطر دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. اگر $\widehat{ED} = 60^\circ$ ، آنگاه ثابت کنید: $AD = BC = \frac{1}{2}AB$





مطلب‌های لازم: مماس بر شعاع نقطه‌ی تماس عمود است؛ دو مماس رسم‌شده از یک نقطه‌ی بیرون دایره برابرند؛ زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌رویش است. مرکز دایره O است و E, O, C روی یک خط‌اند (قطر).

1. $\angle EOD = 60^\circ$ (برابر کمان ED). چون EC قطر است، $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
2. $BD \perp OD$ و $BC \perp OC$ (مماس بر شعاع عمود است). در چهارضلعی OCBD: $\angle B = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. دو مماس BC و BD برابرند و زاویه‌ی بینشان 60° است؛ پس مثلث BCD متساوی‌الاضلاع است: $\angle BDC = 60^\circ$ و $BC = BD = CD$.
3. نقطه‌ی D بین A و B است (مطابق شکل) پس $\angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 120^\circ$.
4. $\angle ECD$ محاطی روبه‌رو به کمان ED است: $\angle ECD = 60^\circ / 2 = 30^\circ$. چون A, E, C روی یک خط‌اند (و E بین A و C)، $\angle ACD = \angle ECD = 30^\circ$.
5. در مثلث ADC: $\angle A = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle ACD$ ؛ پس مثلث ADC متساوی‌الساقین است و $AD = DC$.
6. نتیجه: $AD = DC = BC = BD$. چون D بین A و B است، $AB = AD + DB = 2AD$ ؛ پس $AD = BC = \frac{1}{2}AB$.



تمرین

صفحه ۱۴۱

۲۰

۱۰. سه نقطه‌ی A, B و C روی یک دایره چنان قرار دارند که دو وتر AB و BC برابرند. اگر نقطه‌ی D را روی این دایره چنان انتخاب کنیم که ABCD یک چهارضلعی باشد،

الف) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصله‌ی یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصله‌ی یکسان دارد.

ب) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصله‌ی یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصله‌ی یکسان دارد.

قرارداد: منظور از فاصله‌ی نقطه از یک ضلع، طول عمودی است که از آن نقطه بر خط آن ضلع وارد می‌شود. مطلب لازم: نقاط نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند.

الف) خیر. فاصله‌های یکسان از AB و BC یعنی BD نیم‌ساز $\angle ABC$ باشد؛ ولی D هر نقطه‌ی دلخواه روی کمان AC می‌تواند باشد. مثال: دایره‌ی واحد، $B = (0, 1)$ ، $A = (-0.8, -0.6)$ ، $C = (0.8, -0.6)$ ($AB = BC$) و $D = (0.6, -0.8)$. برای وسط BD یعنی $(0.3, 0.1)$ ، فاصله از خط AB تقریباً 0.67 و از خط BC تقریباً 0.13 است (نابرابر).

شرط اضافه: $AD = CD$ (یعنی D وسط کمان AC؛ هم‌ارز با اینکه BD قطر دایره باشد).

اثبات: مثلث‌های ABD و CBD: $AB = CB$ (فرض)، $AD = CD$ (شرط) و BD مشترک؛ پس هم‌نهشت‌اند (ض‌ض‌ض) و $\angle ABD = \angle CBD$. یعنی BD نیم‌ساز $\angle ABC$ است و هر نقطه‌ی آن از AB و BC به یک فاصله است. ■ (توضیح هم‌ارزی: B و D هر دو از A و C به یک فاصله‌اند؛ پس BD عمودمنصف AC است و از مرکز می‌گذرد، یعنی قطر است.)

ب) بله، همیشه (بدون شرط اضافه). چون $AB = BC$ وترهای برابرند، کمان‌های AB و BC (که در ترتیب A, B, D, C کنار هم هستند) برابرند. $\angle ADB$ و $\angle BDC$ محاطی روبه‌رو به این دو کمان‌اند؛ پس $\angle ADB = \angle BDC$. یعنی DB نیم‌ساز $\angle ADC$ است و هر نقطه‌ی BD از AD و CD به یک فاصله است. ■

در «ب» چون وترهای AB و BC برابرند، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به آن‌ها برابر می‌شود؛ ولی در «الف» برای نیم‌ساز بودن BD لازم است D وسط کمان AC باشد.

تمرین

صفحه ۱۴۱

۲۱

۱۱. روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو کمان مساوی BC و CD جدا شده‌اند. خط عمود بر CD که از نقطه‌ی D خارج شده است، AC را در نقطه‌ی F قطع می‌کند. اگر محل برخورد AC و BD نقطه‌ی E باشد، آنگاه ثابت کنید نقطه‌ی F وسط AE است.

کمان‌های BC و CD برابرند؛ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به آن‌ها برابرند. قرار می‌دهیم $\angle CAB = \angle DAC = \alpha$ (محاطی روبه‌رو به BC و CD از رأس A) و نیز $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ (هر دو روبه‌رو به کمان CB).

۱. $\angle ADB = 90^\circ$ روی BD است؛ پس مثلث ADE در D قائم‌الزاویه است و $\angle DAE = \angle DAC = \alpha$ ، در نتیجه $\angle AED = 90^\circ - \alpha$.

۲. $DF \perp CD$ ، پس $\angle CDF = 90^\circ$. DE (روی DB) با DC زاویه‌ی $\angle CDE = \angle CDB = \alpha$ می‌سازد و درون زاویه‌ی CDF است؛ پس $\angle EDF = 90^\circ - \alpha$.

۳. در مثلث DEF: $\angle FED = \angle AED = 90^\circ - \alpha$ (روی AE است) و $\angle EDF = 90^\circ - \alpha$. دو زاویه برابرند، پس $FD = FE$.

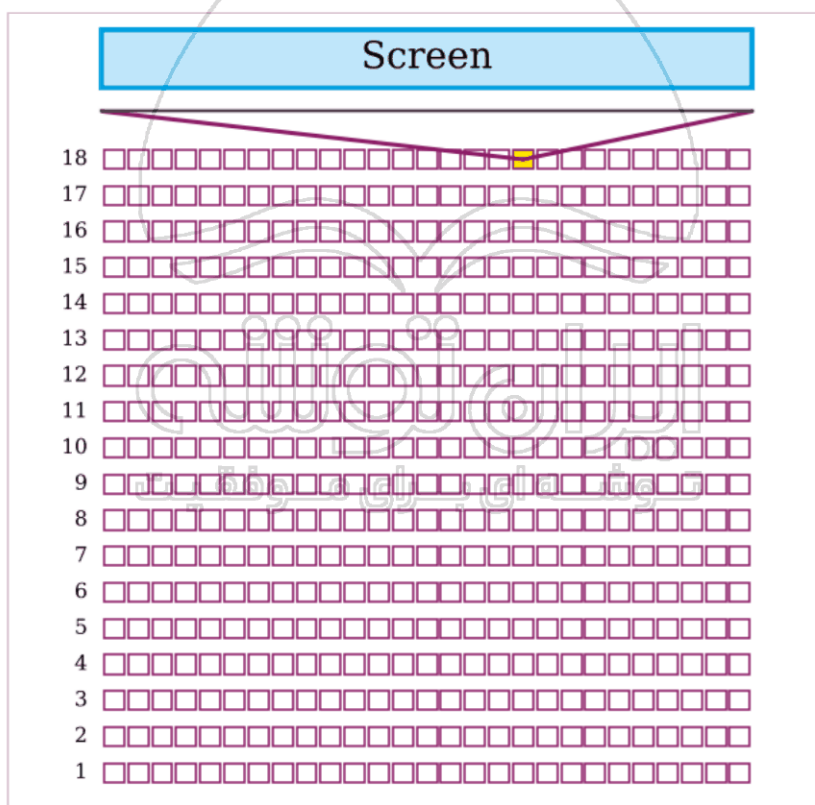
۴. در مثلث ADF: $\angle ADF = \angle ADE - \angle FDE = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \angle DAF$ پس $FA = FD$.

۵. پس $FA = FD = FE$. نقطه‌ی F روی خط AE است و از A و E به یک فاصله است؛ پس وسط AE است. ■

۱۲. کاظم برای دیدن یک فیلم خارجی به سینما رفته بود. او که به زبان فیلم تسلط نداشت، مجبور بود زیرنویس فیلم را بخواند. صندلی کاظم (همان طور که در تصویر صفحه‌ی بعد می‌بینید) نزدیک پرده‌ی نمایش فیلم بود و او برای خواندن هر خط زیرنویس، باید سرش را به اندازه‌ی فاصله‌ی دو کتفش (از راست به چپ) می‌چرخاند!

همان طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر از صندلی کاظم دو پاره خط به دو سر پرده‌ی نمایش رسم کنیم، زاویه‌ای در حدود ۱۶۰ درجه ساخته می‌شود. کاظم اواسط فیلم گردن درد گرفت. او فیلم را نیمه‌کاره رها کرد و از سینما بیرون آمد ولی دلش می‌خواست بداند آخر فیلم چه می‌شود. کاظم تصمیم گرفت این بار بلیت فیلم را اینترنتی تهیه کند تا بتواند خودش صندلی‌اش را انتخاب کند. او با خود فکر کرد که اگر از روی صندلی حداکثر زاویه‌ی ۶۰ درجه با دو سر پرده‌ی سینما داشته باشد، می‌تواند به راحتی فیلم را ببیند. در شکل بالا، کاظم چه صندلی‌هایی را انتخاب کند تا خواسته‌اش برآورده شود؟

شکل کتاب: ۱۸ ردیف صندلی (ردیف ۱۸ نزدیک‌ترین ردیف به پرده)، در هر ردیف ۲۷ صندلی (شماره‌ی صندلی‌ها از چپ به راست). صندلی کاظم (ردیف ۱۸، صندلی ۱۸) زردرنگ است:



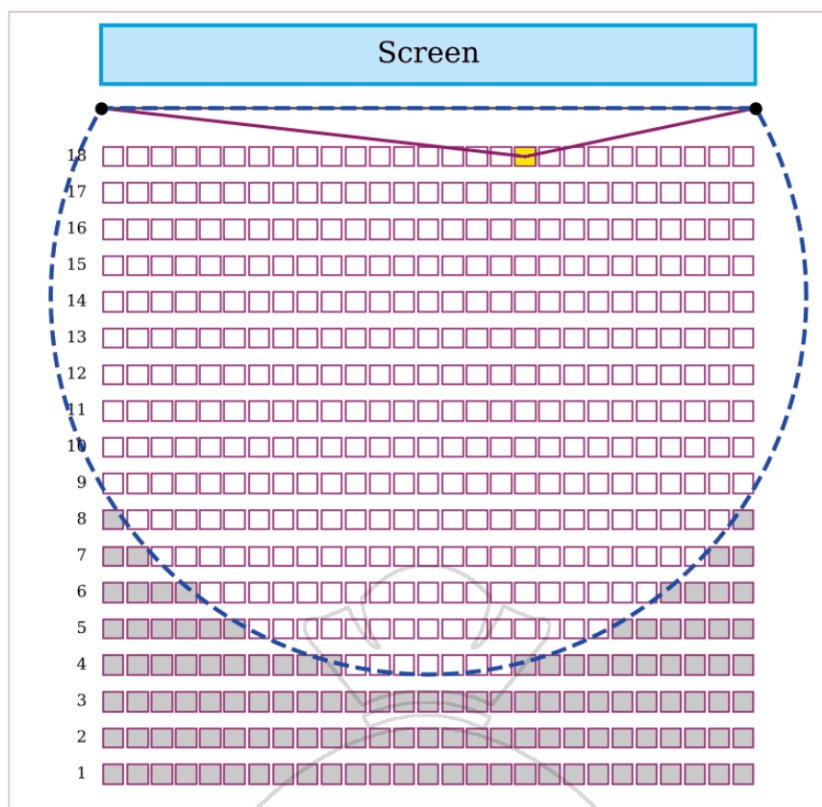
گام ۱ — دایره‌ی ۶۰ درجه: دو سر پرده را S و T می‌نامیم. نقطه‌هایی را که ST را با زاویه‌ی دقیقاً ۶۰° می‌بینند، روی کمانی از دایره قرار دارند (زاویه‌ی محاطی ۶۰° یعنی زاویه‌ی مرکزی ۱۲۰°). مرکز Ω این دایره روی عمود منصف ST است و در مثلث متساوی‌الساقین ΩST زاویه‌ی رأس ۱۲۰° و زاویه‌های قاعده ۳۰° است؛ پس $ST/2 = R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}/2$ و $R = ST/\sqrt{3}$ و فاصله‌ی Ω تا ST برابر $R/2$ است.

گام ۲ — درون و بیرون دایره: اگر X درون دایره (سمت صندلی‌ها) باشد، زاویه‌ی SXT بزرگ‌تر از ۶۰° است؛ اگر X بیرون دایره باشد، یکی از پاره‌خط‌های XS یا XT دایره را در نقطه‌ی Y قطع می‌کند و $\angle SYT = 60^\circ$ زاویه‌ی خارجی مثلثی است که $\angle SXT$ یکی از زاویه‌های داخلی غیرمجاور آن است؛ پس $\angle SXT < 60^\circ$. **صندلی‌های مناسب کاظم، صندلی‌های بیرون این دایره‌اند.**

گام ۳ — اندازه‌ها از شکل: پهنای پرده برابر پهنای هر ردیف است: ۲۷ صندلی. با واحد «پهنای یک صندلی»: مرکز صندلی ردیف ۱۸ دو واحد پایین‌تر از لبه‌ی پایین پرده است و فاصله‌ی دو ردیف کنار هم ۱٫۵ واحد است. (راستی‌آزمایی: برای صندلی کاظم زاویه‌ی S-صندلی-T حدود ۱۶۱٫۵° می‌شود که با «حدود ۱۶۰ درجه»‌ی متن سازگار است.) پس $ST = 27$ ، $R = 27/\sqrt{3} \approx 15.59$ و مرکز دایره ≈ 7.79 و $27/(2\sqrt{3}) \approx 7.79$ واحد پایین‌تر از پرده است.

گام ۴ — شمارش صندلی‌ها: صندلی ردیف ۲ و شماره‌ی s (از چپ)، در دستگاهی که مبدأ آن سر چپ پرده است، مرکزی با مختصات $((2 + 1.5(18 - r)), -(s - 0.5))$ دارد. صندلی وقتی مناسب است که فاصله‌اش از مرکز دایره، یعنی $(-7.79, 13.5)$ ، دست‌کم R باشد.

ردیف	شماره‌ی صندلی‌های مناسب (زاویه $\geq 60^\circ$)
۱، ۲ و ۳	همه‌ی ۲۷ صندلی
۴	صندلی‌های ۱ تا ۱۰ و ۱۸ تا ۲۷
۵	صندلی‌های ۱ تا ۶ و ۲۲ تا ۲۷
۶	صندلی‌های ۱ تا ۴ و ۲۴ تا ۲۷
۷	صندلی‌های ۱ و ۲ و نیز ۲۶ و ۲۷
۸	صندلی‌های ۱ و ۲۷
۹ تا ۱۸	هیچ صندلی



پاسخ: کاظم باید صندلی‌های بیرون دایره (خاکستری در شکل) را انتخاب کند: **همه‌ی صندلی‌های ردیف‌های ۱ تا ۳ و صندلی‌های دو طرف ردیف‌های ۴ تا ۸ مطابق جدول؛ از ردیف ۹ تا ۱۸ هیچ صندلی‌ای زاویه‌ی ۶۰° یا کمتر ندارد.** (نتیجه‌ی صندلی‌های نزدیک مرز، مثل ردیف ۴ صندلی‌های ۱۰ و ۱۸ با زاویه‌ی حدود ۵۹٫۷°، به دقت اندازه‌گیری شکل وابسته است؛ برای اطمینان، ردیف‌های ۱ تا ۳ را انتخاب کند.)

تمرین

صفحه ۱۴۳

۲۳

۱. در یک دایره، وتر AB بر قطر CD در نقطه‌ی M عمود است. ثابت کنید: $AM^2 = CM \times DM$

مرکز دایره O و شعاع r است؛ $OM = d$ می‌نامیم. M روی قطر CD است؛ پس (با نام‌گذاری مناسب دو سر قطر) M بین O و D قرار دارد؛ $DM = r - d$ و $CM = CO + OM = r + d$.

مثلث OMA در M قائم‌الزاویه است ($AB \perp CD$). طبق فیثاغورس:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = r^2 - d^2$$

از طرفی:

$$CM \times DM = (r + d)(r - d) = r^2 - d^2$$

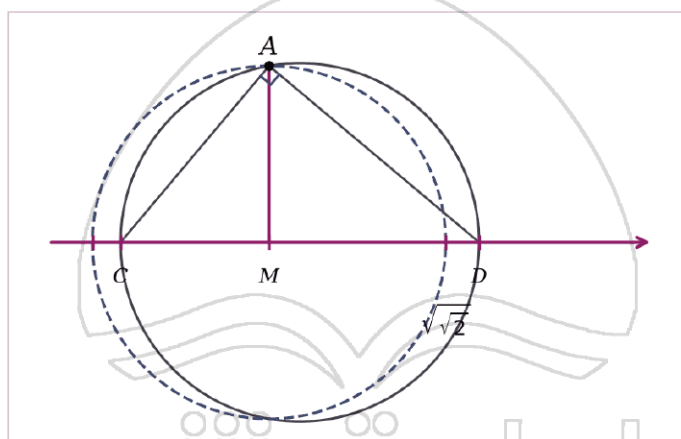
پس $AM^2 = CM \times DM$. ■ (اگر $M = O$ باشد، $d = 0$ و $AM^2 = r^2 = r \times r$ و باز هم برقرار است.)

۲. عدد $\sqrt{2}$ را روی محور نشان دهید.

راهنمایی: می‌توانید از مسئله‌ی قبل کمک بگیرید.

از تمرین ۱: $AM^2 = CM \times DM$. اگر $CM = 1$ و $DM = \sqrt{2}$ بگیریم، $AM^2 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ و $AM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

۱. روی محور، نقطه‌ی $\sqrt{2}$ را مشخص می‌کنیم (قطر مربعی به ضلع ۱ را با پرگار روی محور می‌بریم).
۲. نقطه‌ی M را مبدأ (نقطه‌ی ۰)، C را نقطه‌ی ۱- و D را نقطه‌ی $\sqrt{2}$ می‌گیریم: $CM = 1$ و $DM = \sqrt{2}$.
۳. وسط CD را با عمود منصف پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به قطر CD رسم می‌کنیم.
۴. در نقطه‌ی M (مبدأ) بر محور عمود می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. وتر AB (با B قرینه‌ی A) بر قطر CD عمود است، پس طبق تمرین ۱: $AM^2 = CM \times DM = \sqrt{2}$.
۵. با پرگار به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ محور را در نقاط $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ قطع می‌کند.



۳. جاده و راه‌آهن هرگز یک‌باره نمی‌پیچند بلکه از یک جهت به جهت دیگر به ملایمت و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد، تغییر مسیر می‌دهند. این قوس، معمولاً قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم جاده، بر آن مماس هستند. (تصویر ابتدای این فصل را ببینید.)
- معمولاً شعاع قسمت منحنی جاده را بزرگ می‌گیرند که در مورد راه‌آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد.
- الف) با استفاده از تمرین ۱ روشی برای یافتن مرکز قوس یک جاده‌ی کوهستانی بیابید. (فرض کرده‌ایم قوس جاده، قسمتی از یک دایره است.)

ب) در برخی جاده‌ها پیچ‌های خطرناکی وجود دارند که در ایران به «پیچ‌های غریب‌گش» معروف‌اند. ویدئوی یک پیچ غریب‌گش در «www.webmath.ir» قرار داده شده است. درباره‌ی نحوه‌ی اصلاح این پیچ، در کلاس گفت‌وگو کنید.

الف) فرض: قوس جاده‌ی کمانی از دایره‌ای به مرکز O و شعاع r (هر دو مجهول) است. روش:

1. دو نقطه‌ی A و B روی لبه‌ی قوس انتخاب می‌کنیم و فاصله‌ی $AB = c$ را با متر (یا ریسمان) اندازه می‌گیریم.

2. وسط AB را M می‌نامیم. از M خطی عمود بر AB رسم می‌کنیم تا قوس را در D قطع کند و $MD = h$ را اندازه می‌گیریم.

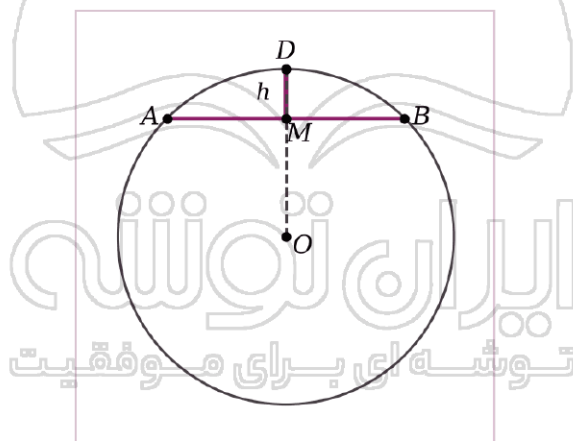
3. خط DM از مرکز می‌گذرد (عمودمنصف وتر از مرکز می‌گذرد)؛ پس DM بخشی از قطر CD و $AB \perp CD$ در M است. طبق تمرین ۱: $AM^2 = CM \times DM$ ، اینجا $AM = c/2$ ، $DM = h$ و $CM = 2r - h$.

4. پس $(c/2)^2 = h(2r - h)$ و از آنجا شعاع به دست می‌آید:

$$r = \frac{c^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

مرکز O روی خط DM و به فاصله‌ی r از D است (روی همان خطی که از D به سمت M ادامه می‌یابد).

مثال عددی: $c = 100$ متر و $h = 2$ متر: $r = 100^2 / (8 \times 2) + 2/2 = 6250 + 1 = 6251$ متر. (بررسی: $h(2r - h) = 2 \times 12500 = 25000 = 50^2$)



روش دیگر: عمودمنصف دو وتر مختلف را رسم کنیم؛ محل برخورد آن‌ها مرکز است.

ب) (گفت‌وگوی کلاسی؛ ویدئوی سایت در دسترس نبود و پاسخ فقط بر پایه‌ی مطلب درس است.) طبق متن درس، قوس جاده باید کمانی از یک دایره با شعاع به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد و قسمت‌های مستقیم بر آن مماس باشند. برای اصلاح یک پیچ خطرناک می‌توان: ۱) با روش «الف» شعاع و مرکز قوس موجود را پیدا کرد و اگر شعاع کوچک یا نامنظم است، مسیر را دوباره به صورت کمانی از دایره‌ای با شعاع بزرگ‌تر طراحی کرد؛ ۲) تا زمان اصلاح، با علامت هشدار و محدودیت سرعت خطر را کم کرد.

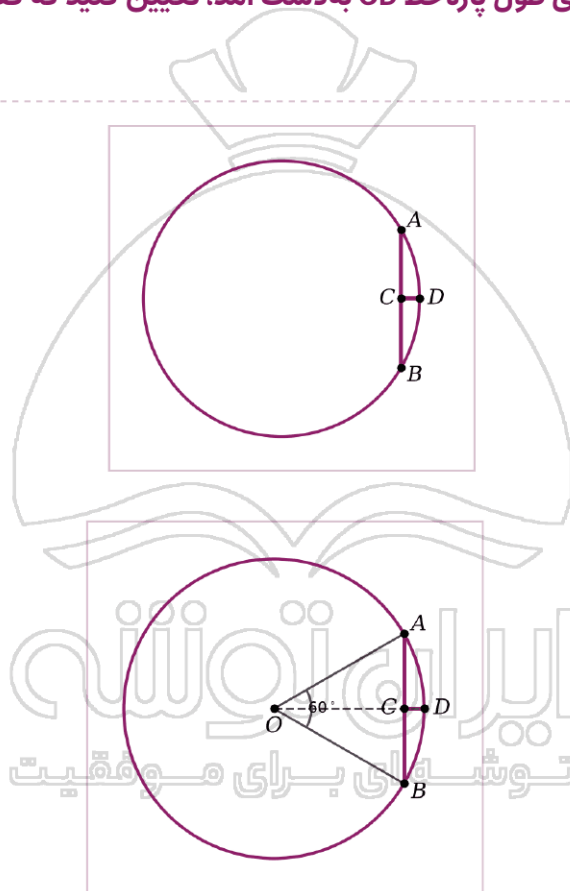
۴. می‌دانیم عمیق‌ترین قسمت اقیانوس اطلس در گودال پورتوریکو به عمق ۸۶۰۵ متر است و عرض اقیانوس اطلس در نزدیکی خط استوا تقریباً $\frac{1}{6}$ محیط دایره‌ای است که خط استوا روی آن قرار دارد.

می‌خواهیم بدانیم کف اقیانوس اطلس چگونه است: محدب، مقعر یا مسطح؟

فرض کنید کف اقیانوس اطلس مسطح باشد. اگر دایره‌ی زیر را خط استوا در نظر بگیریم و نقاط A و B ابتدا و انتهای اقیانوس اطلس روی این دایره باشند، حداکثر عمق اقیانوس اطلس برابر با طول پاره‌خط CD است. اگر شعاع کره‌ی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیریم، طول تقریبی CD (برحسب کیلومتر) با دوتا از اعداد زیر برابر است. آن دو عدد کدام‌اند؟

الف) $۳۲۰۰\sqrt{۳} - ۶۴۰۰$ ب) $۳۲۰۰\sqrt{۳} + ۶۴۰۰$ ج) ۸,۶۰۵ د) ۸۵۷,۴۳۷

اکنون باتوجه به تخمینی که برای طول پاره‌خط CD به دست آمد، تعیین کنید که کف اقیانوس اطلس، محدب است یا مقعر یا مسطح؟



۱. عرض اقیانوس $\frac{1}{6}$ محیط دایره است؛ پس کمان AB برابر $۶۰^\circ / ۶ = ۱۰^\circ$ و زاویه‌ی مرکزی $\angle AOB = ۶۰^\circ$ است.
۲. مثلث OAB متساوی‌الساقین ($OA = OB = r$) با زاویه‌ی رأس ۶۰° است؛ پس دو زاویه‌ی قاعده‌اش هر کدام ۶۰° است و مثلث متساوی‌الاضلاع است: $AB = r$.
۳. OD عمود منصف AB است و C وسط AB است: $AC = r/۲$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OCA (فیثاغورس):
 $OC = (\sqrt{۳}/۲) \cdot r$ و $OC^2 = r^2 - r^2/۴ = ۳r^2/۴$
۴. $CD = OD - OC = r - (\sqrt{۳}/۲) r = ۶۴۰۰ - ۳۲۰۰\sqrt{۳}$ کیلومتر.

۵. با $1,732,05 \approx \sqrt{3} : 5542,56 \approx 3200\sqrt{3}$ و $857,437 \approx 5542,56 - 6400 \approx CD$ کیلومتر.

پاسخ: دو عدد «الف» $(3200\sqrt{3} - 6400)$ و «د» $(857,437)$. (گزینه‌ی «ب» تقریباً $11942,6$ است و گزینه‌ی «ج» عمق واقعی بر حسب کیلومتر است.)

کف اقیانوس چگونه است؟ اگر کف اقیانوس مسطح بود، حداکثر عمق باید تقریباً 857 کیلومتر می‌شد، در حالی که عمیق‌ترین نقطه‌ی واقعی فقط $8,605$ کیلومتر است (حدود یک صدم). پس کف اقیانوس مسطح نیست؛ بلکه تقریباً هم‌جهت با سطح خمیده‌ی زمین و به سمت سطح آب برآمده است. **کف اقیانوس اطلس محدب است.**

تمرین

صفحه ۱۴۵

۲۷

۵. اگر n نقطه روی دایره، کمان‌های برابر ایجاد کرده باشند و آن‌ها را m تا در میان به یکدیگر وصل کرده باشیم، شکل حاصل چند محور تقارن دارد؟
برای مثال، در شکل زیر، هشت نقطه روی دایره کمان‌های برابر ایجاد کرده‌اند ($n = 8$). این نقاط دوتا در میان به یکدیگر وصل شده‌اند ($m = 2$).



پاسخ: شکل n محور تقارن دارد (در مثال بالا ۸ محور)، به شرط اینکه $n \geq 3$ باشد و اتصال‌ها خالی نباشد ($m + 1$ مضرب n نباشد).

دلیل: نقطه‌ها رأس‌های یک ضلعی منتظم‌اند. هر نقطه به نقطه‌ی بعدی $(m + 1) - m$ وصل شده است.

۱. **n محور تقارن وجود دارد:** n خطی که از مرکز می‌گذرند و هر کدام تقارن چندضلعی منتظم هستند (اگر n فرد باشد هر خط از یک نقطه و وسط کمان روبه‌رو؛ اگر n زوج باشد $n/2$ خط از دو نقطه‌ی روبه‌رو و $n/2$ خط از وسط دو کمان روبه‌رو). بازتاب نسبت به هر یک از این خط‌ها نقطه‌های روی دایره را به همین نقطه‌ها می‌برد و فاصله‌ی «چندتا در میان» را حفظ می‌کند؛ پس هر پاره‌خط شکل به یک پاره‌خط شکل می‌رود و شکل بر خودش منطبق می‌شود.

2. **بیش از n محور وجود ندارد:** نقاط شکل که از مرکز دورترند همان n نقطه‌ی روی دایره‌اند؛ هر محور تقارن شکل باید از مرکز بگذرد و این n نقطه را به خودشان ببرد، یعنی محور تقارن n ضلعی منتظم باشد و n ضلعی منتظم دقیقاً n محور تقارن دارد.

نتیجه: تعداد محورهای تقارن برابر n است و به m بستگی ندارد. (مثال: $n = 8 \Rightarrow 8$ محور).

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



تمرین

صفحه ۱۴۵

۲۸

۶. در یک دایره نقطه‌ی دلخواه M روی وتر دلخواه AB مفروض است. چند وتر برابر با AB از نقطه‌ی M می‌گذرد؟

وترهای برابر یک دایره از مرکز فاصله‌ی یکسان دارند و برعکس (تمرین ۶ بخش «خط و دایره»). فاصله‌ی O از AB را d می‌نامیم و پای عمود را H . هر وتر برابر AB که از M بگذرد، خطی است که از M می‌گذرد و فاصله‌اش از O برابر d است؛ یعنی خطی گذرنده از M که بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع d مماس است.

تعداد مماس‌هایی که از یک نقطه بر یک دایره می‌توان رسم کرد: نقطه‌ی بیرون دایره $\leftarrow 2$ مماس؛ نقطه‌ی روی دایره $\leftarrow 1$ مماس. AB خودش یکی از مماس‌هاست (در H)، پس:

○ اگر $M \neq H$ (M وسط AB نیست) و AB قطر نیست: M بیرون دایره‌ی کوچک است $\leftarrow 2$ وتر: خود AB و قرینه‌ی آن نسبت به خط OM .

○ اگر $M = H$ یعنی M وسط AB است (AB قطر نیست): M روی دایره‌ی کوچک است $\leftarrow$ فقط 1 وتر (خود AB).

○ اگر AB قطر باشد ($d = 0$) و $M \neq O$: تنها قطر گذرنده از M همان AB است $\leftarrow 1$ وتر.

○ اگر AB قطر باشد و $M = O$: همه‌ی قطرهای برابر AB هستند $\leftarrow$ بی‌شمار وتر.

پاسخ کلی: معمولاً دو وتر (با احتساب خود AB): در حالت‌های خاص بالا یک وتر یا بی‌شمار وتر.

پروژه

صفحه ۱۴۶

۲۹

۷. پروژه. یک شکل را محدب بسته می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی P و Q که درون شکل باشند، پاره‌خط PQ نیز کاملاً درون آن شکل قرار گیرد.

پاره‌خطی که دو نقطه روی یک شکل محدب بسته (مانند شکل زیر) را به هم وصل می‌کند، وتر می‌نامیم. در شکل زیر، دو پاره‌خط آبی و صورتی، وتر هستند.

اگر همه‌ی وترهایی که از یک نقطه می‌گذرند باهم برابر باشند، آن نقطه را نقطه‌ی هم‌وتری می‌نامیم. برای مثال، در یک دایره، تمام وترهایی که از مرکز دایره می‌گذرند باهم برابرند؛ یعنی مرکز دایره، نقطه‌ی هم‌وتری دایره است.

الف) چند نوع شکل محدب بسته‌ای را که نقطه‌ی هم‌وتری دارند، بیابید.

ب) آیا شکل محدب بسته‌ای با دو نقطه‌ی هم‌وتری وجود دارد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

الف) دایره؛ مرکز آن نقطه‌ی هم‌وتری است (همه‌ی وترهای گذرنده از مرکز قطرنده و برابرند). شکل‌های دیگری مثل بیضی یا مربع این ویژگی را ندارند، چون وترهای گذرنده از مرکزشان طول‌های متفاوتی دارند (مربع: ضلع و قطر). گفته می‌شود شکل‌های غیردایره‌ای هم با یک نقطه‌ی هم‌وتری وجود دارند، ولی ساختنشان فراتر از سطح کتاب است.

ب) برای دایره خیر؛ اگر نقطه‌ی P غیر از مرکز باشد، وتر عمود بر قطر گذرنده از P کوتاه‌تر از آن قطر است. برای هر شکل محدب بسته‌ی دیگر هم گفته می‌شود که دو نقطه‌ی هم‌وتری ممکن نیست (نتیجه‌ای در ریاضیات پیشرفته).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

